



University of the Pacific
Scholarly Commons

Euler Archive - All Works

Euler Archive

1775

Demonstratio theorematis Neutoniani de evolutione potestatum binomii pro casibus, quibus exponentes non sunt numeri integri

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Demonstratio theorematis Neutoniani de evolutione potestatum binomii pro casibus, quibus exponentes non sunt numeri integri" (1775). *Euler Archive - All Works*. 465.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/465>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DEMONSTRATIO
THEOREMATIS NEVTONIANI
DE EVOLVTIONE POTESTATVM BINOMII
PRO CASIBVS QVIBVS EXPONENTES
NON SVNT NVMERI INTEGRI.

Auctore

L. E V L E R O.

§. I.

Theorema hoc, ita repraesentari solitum

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 \text{ etc.}$$

 quatenus latissime patere, et sub exponente n , omnes
 plane numeros posibles complecti censetur, funda-
 mentum constituit vniuersae analyseos sublimioris;
 unde eius veritatem solidissime demonstrari necesse
 est. Modus autem, quo ad hoc theorema est per-
 ventum, dum quantitas $a+b$ aliquoties in se in-
 vicem multiplicari solet, ita est comparatus, vt pro
 exponente n alii numeri non prodeant, nisi qui sint
 integri positivi, siquidem continuo multiplicando
 per eandem quantitatem $a+b$ aliae potestates oriri
 nequeunt, nisi quarum exponentes indicent factorum
 numerum, qui non numerus integer omnino esse
 nequit. Interim tamen vix quisquam dubitasse vi-
 detur,

detur, quin, si haec formula vera fuerit pro omnibus numeris integris loco n assumtis, eadem quoque vera sit futura pro omnibus plane numeris siue fractionis, siue adeo irrationalibus; quae conclusio quamquam hoc casu locum habet, id tamen ob alias rationes vsu venit, quandoquidem eiusmodi casus exhiberi possunt, quibus formula quaequam vera deprehenditur, quoties exponens n fuerit numerus integer positivus, eadem autem neutiquam locum habere possit, simulac eidem exponenti valores fractioni tribuantur.

§. 2. Quo hoc exemplo illustremus, proposita sit sequens series

$$\frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n) \cdot (1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n) \cdot (1-a^{n-1}) \cdot (1-a^{n-2})}{1-a^3} \\ + \frac{(1-a^n) \cdot (1-a^{n-1}) \cdot (1-a^{n-2}) \cdot (1-a^{n-3})}{1-a^4} + \text{etc.}$$

cnius valor quoties exponens n fuerit numerus integer positivus, semper huic ipsi exponenti n aequalis deprehenditur, neque tamen hinc concludere licet, hanc aequalitatem subsistere, dum pro n alii numeri accipiuntur; haec autem proprietas locum quoque habet sumendo $n=0$, tum enim ob $a^n=1$ statim primus terminus evanescit, vna cum omnibus sequentibus, quippe qui factorem habent $1-a^n=0$ ita ut hoc casu nostra series fiat $=0$, hoc est ipsi exponenti $n=0$ aequalis; tum vero sumto $n=1$ primus terminus fit $\frac{1-a}{1-a}=1$ at secundus terminus ob $1-a^{n-1}=0$ evanescit vna cum omnibus sequentibus

tibus, ita ut hoc casu $n=1$ ipsa series fiat $=1$. Consideremus adhuc casum $n=2$, quo primus terminus fit $\frac{1-a^2}{1-a} = 1+a$, at secundus terminus praebet $\frac{(1-a^2) \cdot (1-a)}{1-a^2} = 1-a$, tertius vero cum omnibus sequentibus, ob factorem $1-a^{n-1} = 0$ evanescet, ex quo summa nostra seriei erit $=2$ hoc est ipsi n aequalis. Statuamus adhuc $n=3$ et primus terminus dabit $\frac{1-a^3}{1-a} = 1+a+a^2$ secundus vero terminus praebet

$$\frac{(1-a^3) \cdot (1-a^2) \cdot (1-a)}{1-a^3} = 1-a-aa+a^3,$$

quartus autem terminus et sequentes omnes quia continent factorem $1-a^{n-1} = 0$ evanescunt, unde nostra series hoc casu $n=3$ evadit $=3$. Similique modo ostendi potest, quicumque numerus integer loco n accipiatur, seriem nostram eidem numero aequalem esse prodituram, quilibet autem facile perspiciet, si caperetur $n=\frac{1}{2}$ hanc seriem maxime esse discrepaturam a valore $\frac{1}{2}$.

§. 3. Cum igitur de hac formula

$$n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n) \cdot (1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n) \cdot (1-a^{n-1}) \cdot (1-a^{n-2})}{1-a^3} + \text{etc.}$$

affirmare liceat, eam semper veram esse, quoties n fuerit numerus integer positivus; neque vero haec aequalitas pro aliis numeris locum habeat, merito quoque dubitare licebit, an nostrum theorema

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} b + \frac{n}{2} \cdot a^{n-2} b^2 + \frac{n}{3} \cdot a^{n-3} b^3 \text{ etc.}$$

generalissime veritati sit consentaneum, etiam si certissimus, id verum esse, quoties exponens n fuerit numerus integer positivus. Quamobrem eo magis utique necesse est, ut ista veritas rigorosa demonstratione corroboraretur. Equidem olim demonstrationem ex analysi infinitorum petitam tradideram; sed quia ipsa haec analysis nostro theoremate innititur, eam tanquam petitionem principii penitus reiciendam nunc agnosco; ab hoc vitio autem immunem demonstrationem dedit Illustr. Academiae nostrae Socius *Aspinus* in Tomo VIII. Novor. Commentar., ubi pro formula $(x + 1)^n$ assumens seriem generalem:

$$A x^n + B x^{n-1} + C x^{n-2} + \text{etc.}$$

methodo maxime ingeniosa elicit valores aliquot coefficientium A, B, C, D etc. et ex eorum consensu cum serie *Newtoniana*, sine dubio rite concludere potuit, etiam reliquos omnes regulae fore conformes; interim tamen egregia ista demonstratio plurimum inductione innititur, praeterea vero etiam notari convenit secundum coefficientem B ex hac methodo determinationem non accepisse, sed ex aliis conditionibus haud parum absconditis et abstrusis repetiisse. Vnde meam demonstrationem Geometris congratiorem fore confido, quod in ea nihil plane inductioni tribuitur.

§. 4. Ante omnia autem cum sit $a + b = a(1 + \frac{b}{a})$ eritque quoque $(a + b)^n = a^n (1 + \frac{b}{a})^n$ sicque totum negotium reducitur ad evolutionem huius potestatis $(1 + \frac{b}{a})^n$.

$(1 + \frac{b}{a})^n$, quae porro ponendo $\frac{b}{a} = x$ redit ad hanc $(1 + x)^n$, quam nouimus, quoties exponent n fuerit numerus integer posituus, aequalem fore huic seriei

$$1 + \frac{n}{1} \cdot x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot x^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot x^3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot x^4 \text{ etc.}$$

verum si n non fuerit numerus integer posituus, valorem huius seriei tanquam incognitum spectemus, eiusque loco hoc signo $[n]$ utamur, ita ut iam in genere habeamus.

$$[n] = 1 + \frac{n}{1} \cdot x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot x^2 \text{ etc.}$$

de qua etiam nunc plus non nouimus, quam casu, quo n est numerus integer posituus, fore $[n] = (1+x)^n$ reliquis autem casibus quinam valores huic signo $[n]$ conueniant, sequenti modo inuestigemus: Vnde demum parebit, etiam in genere fore $[n] = (1+x)^n$ quicumque numeri pro exponente n accipiantur, quo pacto proposito nostro plene satisfecerimus.

§. 5. Ad hanc inuestigationem instituendam duas huiusmodi series seu duo talia signa $[n]$ et $[m]$ in se inuicem multiplicemus ut seriem obtineamus huic productæ $[m] \cdot [n]$ aequalem, quam facile patet huiusmodi forma expressum iri:

$$1 + A x + B x^2 + C x^3 + D x^4 + E x^5 \text{ etc.}$$

cuius coefficientes A, B, C, D, E etc. quemadmodum per binas litteras m et n determinentur ut pateat; ipsam multiplicationem saltem inchoemus

O 2

$[m] =$

$$[m] = 1 + \frac{m}{1} \cdot x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot x^2 + \text{etc.}$$

$$[n] = 1 + \frac{n}{1} \cdot x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot x^2 + \text{etc.}$$

$$[m] \cdot [n] = 1 + \frac{m}{1} \cdot x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot x x \text{ etc.}$$

$$+ \frac{n}{1} \cdot x + \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} \cdot x x \text{ etc.}$$

$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot x x \text{ etc.}$$

Quod si iam hoc productum inchoatum, cum forma assumpta:

$$x + A x + B x^2 + C x^3 \text{ etc.}$$

qua idem productum exprimi ponimus, comparemus, statim intelligitur, fore:

$$A = m + n \text{ et } B = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} + \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \text{ siue:}$$

$$B = \frac{m m - m}{2} + m n + \frac{n n - 1}{2} \text{ vnde fit}$$

$$B = \frac{m + n}{1} \cdot \frac{m + n - 1}{2}.$$

§. 6. Quemadmodum hic duos primos coefficientes A et B, per literas m et n determinare licuit, ita manifestum est, si superior multiplicatio ulterius continuaretur, inde etiam sequentes coefficientes C, D, E etc. per easdem literas m et n definiri posse, quamvis calculus mox ita fieret molestus, ut maximum laborem requireret. Interim tamen hinc tuto concludere possumus omnes plane coefficientes A, B, C, D, E etc.; certo modo per binas literas m et n determinari debere; etiam si rationem, qua quisque per has literas denitur, ad huc ignoremus, hic autem imprimis observari convenit, hanc compositionis rationem non ab idole li-
tera-

terarum m et n pendere, sed perinde se esse habituram, siue hae literae m et n denotent numeros integros siue alios numeros quoscunque. Hoc ratio- cinium non vulgare probe notetur, quoniam ei to- ta vis nostrae demonstrationis inititur.

§. 7. Hinc facilis nobis via aperitur, veros valores omnium coefficientium A, B, C, D, E etc. inueniendi, dum scilicet literas m et n tanquam nu- meros integros spectamus, quandoquidem hinc eae- dem determinationes oriuntur ac si quoscunque alios numeros denotarent. Spectatis autem literis m et n vt numeris integris vtique habebimus $[m] = (1+x)^m$ et $[n] = (1+x)^n$, vnde harum formularum produ- ctum erit $[m] \cdot [n] = (1+x)^{m+n}$ iam vero haec potestas euoluitur in hanc seriem:

$$1 + \frac{m+n}{1} \cdot x + \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n}{2} \cdot x^2 + \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2} \cdot \frac{m+n-2}{3} \cdot x^3$$

nunc igitur si literas m et n in genere spectemus hanc seriem isto signo $[m+n]$ indicari oportet, vn- de hanc insignem veritatem nanciscimur, semper esse $[m] \cdot [n] = [m+n]$ quicunque etiam numeri loco illarum literarum adhibeantur.

§. 8. Cum igitur binae huiusmodi formulae $[m]$ et $[n]$ in se inuicem ductae praebeant simplicem formulam eiusdem indolis, ita etiam plures eiusmodi formulae in se inuicem ductae ad simplicem reuo-
 CAU cabimus: scilicet sequentes reductiones.

$$[m] \cdot [n] = [m+n]$$

$$[m] \cdot [n] \cdot [p] = [m+n+p]$$

$$[m] \cdot [n] \cdot [p] \cdot [q] = [m+n+p+q] \text{ etc.}$$

O. 3

hinc

hinc si omnes isti numeri m, n, p, q etc. inter se capiantur aequales scilicet $=m$ obtinebimus sequentes reductiones potestatum

$$[m]^2 = [2m]; [m]^3 = [3m]; [m]^4 = [4m]; \text{ etc.}$$

unde generaliter erit $[m]^a = [am]$; denotante a numerum quemcunque integrum.

§. 9. His praenotatis denotet littera i numerum quemcunque integrum positivum ac statuamus primo $2m = i$ ut sit $m = \frac{i}{2}$ ac postremarum formularum prima dabit $[\frac{i}{2}]^2 = [i]$ quia autem i est numerus integer, erit $[i] = (1+x)^i$ (vide §. 4.) sicque erit $[\frac{i}{2}]^2 = (1+x)^i$ unde radicem quadratam extrahendo fit $[\frac{i}{2}] = (1+x)^{\frac{i}{2}}$ sicque iam tantum sumus consecuti, ut theorema Newtonianum etiam verum sit casibus, quibus exponens n est huiusmodi fractio $\frac{i}{2}$.

§. 10. Simili modo si ponamus $3m = i$ ut sit $m = \frac{i}{3}$, altera formularum superiorum praebet $[\frac{i}{3}]^3 = [i] = (1+x)^i$ hinc radicem extrahendo nanciscimur $[\frac{i}{3}] = (1+x)^{\frac{i}{3}}$ sicque theorema nostrum etiam verum est si exponens n fuerit huiusmodi fractio $\frac{i}{3}$, atque hinc in genere manifestum fore $[\frac{i}{a}] = [1+x]^{\frac{i}{a}}$ ita ut iam demonstratum sit, theorema nostrum esse, si pro exponente n fractio quaecunque $\frac{i}{a}$ accipiat, unde veritas iam est evicta pro omnibus numeris positivis loco exponentis n accipiendis.

§. 11. Superest igitur tantum, ut veritas quoque ostendatur pro casibus, quibus exponens n est numerus negativus. Hunc in finem in subsidium vocemus reductionem primo inuentam $[m] \cdot [n] = [m+n]$ ubi denotet m , numerum positivum siue integrum siue fractum ita ut sit uti modo ostendimus $[m] = (1+x)^m$, deinde vero statuatur $n = -m$ eritque $m+n=0$ ideoque $[0] = (1+x)^0 = 1$, quibus substitutis formula superior suppeditat $(1+x)^m$.

$[-m] = 1$ vnde colligimus $[-m] = \frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m}$

ficque etiam demonstratum est theorema Newtonianum verum quoque esse, si exponens n fuerit numerus negativus quicunque atque adeo hoc theorema nunc quidem firmissimis rationibus est confirmatum.